



## INVARIANTES TOPOLÓGICOS EN EL ANÁLISIS INPUT-OUTPUT.

**Fedriani Martel, Eugenio M.**

Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica. Universidad  
Pablo de Olavide.

**Melgar Hiraldo, María del Carmen**

Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica. Universidad  
Pablo de Olavide.



[www.iogroup.org](http://www.iogroup.org)



## INVARIANTES TOPOLÓGICOS EN EL ANÁLISIS INPUT-OUTPUT.

### **Fedriani Martel, Eugenio M.**

Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica. Universidad Pablo de Olavide.

### **Melgar Hiraldo, María del Carmen**

Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica. Universidad Pablo de Olavide.

La Teoría de Grafos Topológicos es una herramienta que se ha mostrado útil para modelizar muy distintas situaciones basadas en las relaciones binarias. No obstante, sus aplicaciones incluyen también la resolución de problemas con diferentes grados de intensidad en las influencias entre los elementos estudiados.

En el Análisis Input-Output ya se han utilizado algunas características de los grafos, por ejemplo, para facilitar cálculos y la visualización de resultados. En este trabajo se demuestra que es posible, además, aprovechar los invariantes topológicos para analizar las tablas input-output e, incluso, para establecer comparaciones entre las economías de diferentes regiones.

# INVARIANTES TOPOLÓGICOS EN EL ANÁLISIS INPUT-OUTPUT

Eugenio M. Fedriani Martel (Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica de la Universidad Pablo de Olavide) [efedmar@upo.es](mailto:efedmar@upo.es)

María del Carmen Melgar Hiraldo (Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica de la Universidad Pablo de Olavide) [mcmelhir@upo.es](mailto:mcmelhir@upo.es)

## Resumen

La Teoría de Grafos Topológicos es una herramienta que se ha mostrado útil para modelizar muy distintas situaciones basadas en las relaciones binarias. No obstante, sus aplicaciones incluyen también la resolución de problemas con diferentes grados de intensidad en las influencias entre los elementos estudiados.

En el Análisis Input-Output ya se han utilizado algunas características de los grafos, por ejemplo, se pueden usar para facilitar cálculos y la visualización de resultados. En este trabajo se demuestra que es posible, además, aprovechar los invariantes topológicos para analizar las tablas input-output e, incluso, para establecer comparaciones entre las economías de diferentes regiones.

## 1. INTRODUCCIÓN

En el proceso de resolución de un problema de índole empresarial o económica pueden presentarse multitud de dificultades; los métodos matemáticos tratan de facilitar la modelización, el tratamiento y la resolución de dichos problemas. Las Matemáticas, en ocasiones, resumen la Economía a proporciones manejables y la dotan de un lenguaje simplificador. Sin embargo, en la mayoría de los casos, las herramientas matemáticas a utilizar se complican conforme se perfecciona el modelo. Es tarea del investigador decidir hasta qué punto le interesa prescindir de la precisión del modelo o adentrarse en complicados cálculos. En lo que sigue veremos cómo se pueden obtener resultados mediante la simple presentación del proceso económico en un sistema de ecuaciones, que es lo que significa el modelo input-output más sencillo. De un modo general, el modelo de Leontief es una cuantificación de las cantidades producidas y consumidas en

un sistema económico caracterizado por  $n$  sectores. Consiste en dos fases, que pueden identificarse con bastante claridad en la descripción histórica que hacía el propio Leontief de su trabajo: la primera es la estimación de los coeficientes tecnológicos del sistema (los denotaremos posteriormente como  $a_{ij}$ ) y de la demanda de cada sector ( $d_i$  para el sector  $i$ -ésimo) mediante toda la información disponible; la segunda es el cálculo de los niveles de producción ( $x_i$  para el producto  $i$ -ésimo; según se verá, son las incógnitas del sistema lineal que se plantea).

Concretando, en el análisis que vamos a realizar se considera inicialmente una economía que consta de  $n$  sectores que producen cada uno un único bien. La cantidad de bien que el sector  $i$ -ésimo vende al sector  $j$ -ésimo para que éste pueda llevar a cabo su producción se denota por  $b_{ij}$ . Estas cantidades suelen expresarse en unidades monetarias y forman la que se conoce como tabla de transacciones o tabla input-output de la economía.

En general, la producción de cada sector no solo se destina a satisfacer las demandas de los sectores considerados en la economía, sino que parte de ella llega a consumidores particulares. Cada una de estas cantidades  $d_i$  suele denominarse *demanda final*. Si se denota por  $x_i$  a la producción total del sector  $i$ -ésimo, es evidente que

$$x_i = \sum_j b_{ij} + d_i.$$

Resulta más operativo escribir esta igualdad en función de las cantidades de bienes que cada sector utiliza para producir una unidad de su propio bien, que se conocen como *coeficientes tecnológicos* y vienen dados por  $a_{ij} = \frac{b_{ij}}{x_j}$ . Podemos entonces reescribir la ecuación anterior como  $x_i = \sum_j a_{ij}x_j + d_i$  o, de forma matricial, como  $X = AX + D$ , o incluso  $(I - A)X = D$ , siendo  $I$  la matriz identidad,  $A$  la matriz de los coeficientes tecnológicos,  $X$  el vector de outputs y  $D$  el vector de demandas finales. La matriz  $I - A$  es la conocida como *matriz de Leontief* y permite determinar las producciones necesarias de cada sector para que se satisfagan unas demandas finales dadas, sin más que calcular  $X = (I - A)^{-1}D$ .

En realidad, desde 1968 se sabe que el modelo clásico de Leontief no explica completamente lo que ocurre en una economía y se considera que es conveniente

trabajar con una matriz tecnológica “teórica” calculada a partir de las matrices de origen y destino. El objetivo final de esta comunicación es utilizar la Teoría de Grafos para realizar un análisis alternativo de la información que aportan la matriz de coeficientes tecnológicos o la matriz asociada a la tabla input-output de la economía. Como se verá, será determinante conocer qué coeficientes tecnológicos son nulos en una determinada economía o región, pero en la práctica estos coeficientes nulos son los mismos independientemente del procedimiento utilizado para obtener la matriz tecnológica a partir de las matrices de origen y destino, por lo que no nos importará qué modo de cálculo se ha empleado para obtener la matriz  $A$ .

## **2. TEORÍA DE GRAFOS**

En 1736, Leonard Euler resolvió el famoso problema de los puentes de Königsberg, utilizando por primera vez lo que llegaría a llamarse Teoría de Grafos. Las aplicaciones de esta Teoría en la actualidad son innumerables y abarcan casi la totalidad de las ramas del conocimiento. En particular, los grafos han sido utilizados en estudios económicos de muy diversa índole. Algunos de los más recientes son los estudios sobre pobreza de Martín (2005) y los relativos al Análisis Input-Output y Análisis Estructural, como son los artículos de Lantner (2001), De Mesnard (2004) y Boulanger (2005).

En lo que respecta a las relaciones entre el Análisis Input-Output y la Teoría de Grafos en el modo en que tratamos de contemplarlas aquí, creemos conveniente destacar un par de trabajos que merecen ser recordados en este contexto: los resultados de Bott y Mayberry (1954), que permiten determinar si una economía es productiva con solo encontrar un árbol maximal, y los análisis de Morillas (1983) sobre el caso particular de las relaciones intersectoriales de la economía andaluza. En este último trabajo se realiza un análisis más pormenorizado del significado económico de algunos invariantes topológicos relacionados con los grafos.

Como el objetivo de esta comunicación no es profundizar en la Teoría de Grafos, el lector interesado puede completar información sobre la misma y recordar los resultados y definiciones más usuales, por ejemplo, en los manuales de Harary (1969) y Diestel (1997).

## 2.1. Conceptos previos

Una forma topológica e intuitiva de definir un grafo es utilizar puntos (que llamaremos *vértices* o nodos) y líneas que unen esos puntos (a las que se conoce como *aristas*). Aunque esto no sea una definición formal para los grafos, aporta un modo de representarlos. No obstante, suelen hacerse necesarias otras definiciones. La más habitual consiste en definir un grafo como un par  $G=(V,A)$ , en el que  $V$  es el conjunto de vértices y  $A$  es un conjunto de pares no ordenados de elementos de  $V$  (aristas). En nuestro caso, será conveniente admitir bucles dentro del grafo; esto es, permitiremos que una arista pueda estar formada por un único vértice repetido. Normalmente, a los grafos con bucles se los suele llamar *seudografos* y cuando se permite que haya aristas repetidas en  $G$  se habla de *multigrafos*.

De hecho, la mayoría de las aplicaciones de los grafos a la Economía se valen de otro concepto que se conoce como digrafo o grafo dirigido. En este caso, el grafo es un par  $D=(V,A)$  de modo que  $A$  es un conjunto de pares ordenados de elementos de  $V$ . Estos pares ordenados se llaman *aristas dirigidas* o *arcos* y es habitual representarlas por flechas que salen del primer vértice y llegan al segundo. Es algo comúnmente aceptado permitir también la existencia de bucles en los digrafos.

Un concepto más que necesitamos recordar es el de *matriz de adyacencia* de un grafo (o de un digrafo). Esta matriz se define como aquella matriz cuadrada que tiene por elemento de la fila  $i$ -ésima y columna  $j$ -ésima un 1 en el caso de que exista una arista del vértice  $i$ -ésimo al  $j$ -ésimo y un 0 en caso contrario. Con estas definiciones, es evidente que los grafos no dirigidos poseen matrices de adyacencia simétricas.

## 2.2. Invariantes topológicos

Si se le asigna un nombre a cada vértice del grafo, se trata con *grafos etiquetados*. Es conveniente caer en la cuenta de que el nombre que se le dé a cada vértice no debe interferir en las propiedades del grafo, por lo que solo se le asignan nombre a los vértices en aquellos casos en que sea imprescindible distinguirlos unos de otros. Cuando no hay necesidad de distinguir unos vértices de otros, es interesante trabajar con las clases de equivalencia formadas por aquellos grafos que son *isomorfos*, es decir, en los

que es posible dar una correspondencia biunívoca entre los vértices de modo que vértices que pertenecen a una arista del grafo de partida se relacionan con vértices que también están en una misma arista del grafo de llegada. Las propiedades que se mantienen para todos los grafos de una misma clase de equivalencia por isomorfismos son las que sirven para definir invariantes topológicos.

Algunos invariantes son muy fáciles de calcular. Por ejemplo, se llama *orden* de un grafo al número de vértices que posee y *tamaño* al número de aristas. Estas características de un grafo pueden cuantificarse con solo “echarle un vistazo” a la representación del grafo que se tenga, pero también admiten un cálculo exacto. Algo parecido ocurre con el resto de las definiciones que siguen. En este trabajo, el cálculo de estos invariantes se ha realizado con la ayuda del programa de computación simbólica Mathematica, versión 5.1 (© Copyright 1988-2004 Wolfram Research, Inc.). En concreto, los comandos utilizados son los que se señalan en la descripción de cada uno y pertenecen al paquete estándar Combinatorica.m dentro de la colección DiscreteMath. Pasamos a comentar brevemente su significado, un comando para su cálculo y la notación utilizada a lo largo de la aplicación práctica que presentamos después:

Orden, o número de vértices, denotado  $\#V$  en lo sucesivo; se calcula con `V[grafo]`.

Tamaño, o número de aristas,  $\#A$ , `M[grafo]`. No es necesario escribir `M[grafo, Directed]` porque `M[grafo]` trabaja indistintamente con grafos y con digrafos.

Valencia media,  $I_1$ , `N[M[grafo]/V[grafo]]`. Es el cociente  $\#A/\#V$ , por lo que un mayor valor de este invariante significa una mayor complejidad del conjunto de las relaciones entre los distintos elementos representados por los vértices.

Ser conexo,  $C_1$ , `ConnectedQ[grafo]`. La respuesta será afirmativa si el grafo (no dirigido) es conexo. Si “grafo” es un digrafo, la respuesta es afirmativa cuando el *grafo subyacente* (esto es, el que resulta de convertir los arcos en aristas y, posteriormente, transformar las aristas múltiples en simples) es conexo. `ConnectedQ[grafo, Strong]` y `ConnectedQ[grafo, Weak]` devuelven True si el digrafo “grafo” es fuertemente conexo o débilmente conexo, respectivamente.

Nº de componentes conexas,  $I_2$ , `Length[ConnectedComponents[grafo]]`. `Length` se utiliza para encontrar el número de elementos de una lista. `ConnectedComponents[grafo]`, por su parte, da la lista de vértices de cada una de las componentes conexas de “grafo”.

Número de bloques del grafo,  $I_3$ , `Length[BiconnectedComponents[grafo]]`. Este número es el de los subgrafos (grafos que se obtienen del original al eliminar vértices y/o aristas) que son posibles componentes conexas al borrar un vértice. Si “grafo” es dirigido, `BiconnectedComponents[grafo]` utiliza el grafo subyacente.

Número de vértices de corte,  $I_4$ , `Length[ArticulationVertices[grafo]]`. Es el número de vértices que pueden desconectar el digrafo “grafo” al borrarse.

Número de puentes,  $I_5$ , `Length[Bridges[grafo]]`. `Bridges[grafo]` da una lista de los puentes de “grafo”; un *puente* es una arista o arco cuya eliminación desconecta el grafo.

Conectividad por vértices,  $I_6$ , `VertexConnectivity[grafo]`. Este comando da el mínimo número de vértices cuyo borrado desconecta a “grafo”.

Conectividad por aristas,  $I_7$ , `EdgeConnectivity[grafo]`. Se calcula el mínimo número de aristas cuya eliminación en “grafo” produce un grafo no conexo.

Ser acíclico,  $C_2$ , `AcyclicQ[grafo]`. Este comando dice si “grafo” es *acíclico* (esto es, si no tiene ciclos) y vale tanto para grafos como para digrafos, aunque las definiciones topológicas de ciclos no coinciden en ambos casos. Aunque normalmente los ciclos son conjuntos de vértices, un *ciclo* se puede ver también como una sucesión de aristas de modo que el segundo vértice de cada arista coincide con el primero de la siguiente, salvo para el segundo de la última arista que coincide con el primero de la primera.



Longitud del ciclo más corto, **I<sub>8</sub>**, `Girth[grafo]`. Este comando solo funciona bien para grafos simples, por lo que debemos tener precaución a la hora de admitir los resultados que lo utilicen en alguna parte de la computación.

Ser árbol, **C<sub>3</sub>**, `TreeQ[grafo]`. Un *árbol* es un grafo conexo sin ciclos. A un grafo acíclico y no conexo se le suele llamar *bosque*.

Planaridad, **C<sub>4</sub>**, `PlanarQ[grafo]`. La respuesta es afirmativa si “grafo” es *plano*, lo que significa que es posible dibujarlo en el plano de modo que dos aristas distintas no pueden cortarse en puntos distintos de los vértices.

Diámetro, **I<sub>9</sub>**, `Diameter[grafo]`. El *diámetro* de “grafo” es la máxima longitud de entre las de los caminos más cortos entre vértices de “grafo”; es decir, hay que calcular los caminos más cortos entre cualesquiera par de vértices de “grafo” y elegir aquél que tenga menor número de aristas o arcos.

Radio, **I<sub>10</sub>**, `Radius[grafo]`. El *radio* de “grafo” es la menor de las excentricidades de los vértices de “grafo”. La *excentricidad* de un vértice es la máxima longitud de los caminos más cortos que parten de ese vértice y llegan a cada uno de los vértices restantes del grafo. Así, este cálculo implica calcular las distancias entre cada vértice y todos los demás (esto es, la longitud de cada uno de los caminos más cortos que salen de ese vértice y llegan a todos los demás), elegir la mayor de estas longitudes para cada vértice (excentricidad) y determinar la menor de todas las excentricidades. El cálculo del radio (como también del diámetro) está relacionado con qué vértices están hacia el centro o hacia la periferia del grafo, lo que puede ser interesante en estudios aplicados.

Número de árboles maximales, **I<sub>11</sub>**, `NumberOfSpanningTrees[grafo]`. Se calcula el número de spanning trees etiquetados de “grafo”. Un *spanning tree*, o *árbol maximal*, es un subgrafo que es un árbol y pasa por todos los vértices del grafo original.

### 3. GRAFOS Y ANÁLISIS INPUT-OUTPUT. UNA APLICACIÓN PRÁCTICA

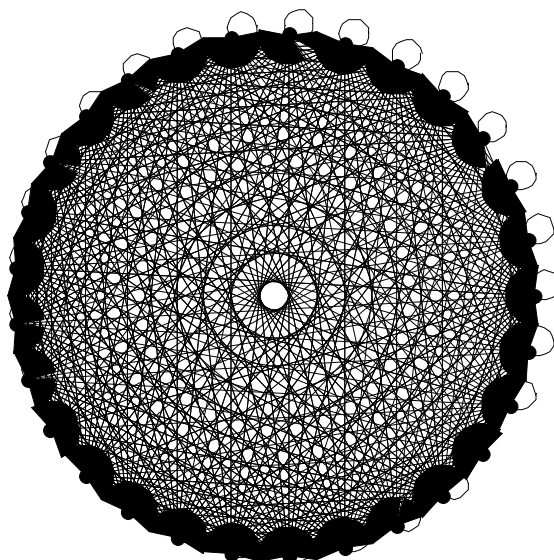
#### 3.1. Procedimiento

Para llegar a nuestro objetivo que, como hemos indicado, es el de aplicar la Teoría de Grafos al análisis de una economía a través de la información contenida en su matriz tecnológica o en la tabla input-output, hemos procedido en primer lugar a calcular la matriz de adyacencia, convirtiendo en 1 los elementos distintos de 0 que hemos encontrado en la tabla de transacciones entre los sectores productivos considerados.

A partir de dicha matriz de adyacencia, hemos obtenido el conjunto de arcos de un digrafo. Estas aristas dirigidas nos indican qué sectores están relacionados a través de la venta de sus productos.

Las aristas dirigidas son las que nos han servido de base para calcular todos los invariantes que hemos definido en el apartado anterior, utilizando el programa Mathematica 5.1.

Con el fin de explicar más claramente la naturaleza de los objetos utilizados, en la Figura 1 se presenta el digrafo obtenido para las tablas input-output de 30 sectores de Andalucía del año 1995.



**Figura 1.** Digrafo correspondiente a las tablas input-output de 30 sectores de Andalucía de 1995.

### 3.2. Ejemplo de aplicación

Tratamos de analizar la economía de una región utilizando los invariantes topológicos que se han definido previamente, así como establecer comparaciones entre las economías de distintas regiones o de una misma región en distintos instantes temporales. Para ello, solo se necesita las tablas input-output de la región a estudiar o las tablas a comparar. En lo que sigue se presenta un ejemplo de cómo aplicar lo anterior a diferentes regiones: unas veces se trata de países y otras de comunidades autónomas, pero en principio no habría problema alguno para aplicar la misma técnica a cualquier región de la que se conociesen las relaciones entre los distintos sectores productivos.

Las tablas que utilizamos aquí son las de Andalucía (1995), Castilla-León (2000), Madrid (1996), Valencia (1995), Bélgica (1995), Japón (1995 y 2000) y Estados Unidos (1997). Como se observa, el año de referencia no es siempre el mismo. Además, el nivel de agregación de los sectores productivos también varía de un caso a otro, estando comprendido entre 29 en el caso de Andalucía (1995) y 134 sectores para Estados Unidos (1997). Los invariantes calculados pueden consultarse en la Tabla 1.

Tabla	Año	#V	#A	I <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	I <sub>2</sub>	I <sub>3</sub>	I <sub>4</sub>	I <sub>5</sub>	I <sub>6</sub>	I <sub>7</sub>	C <sub>2</sub>	I <sub>8</sub>	C <sub>3</sub>	C <sub>4</sub>	I <sub>9</sub>	I <sub>10</sub>	I <sub>11</sub>
Andalucía	1995	29	672	23.1724	Sí	1	1	1	0	6	14	No	1	No	No	∞	1	0
Andalucía	1995	88	3991	45.3523	No	3	3	3	0	0	0	No	1	No	No	∞	∞	0
Bélgica	1995	58	1839	31.7069	No	3	3	2	0	0	0	No	1	No	No	∞	∞	0
Castilla-León	2000	57	2467	43.2807	Sí	1	1	2	0	7	30	No	1	No	No	∞	1	0
EEUU	1997	134	15763	11.7634	No	4	4	6	0	0	0	No	1	No	No	∞	∞	0
Japón	2000	104	6025	57.9327	Sí	1	1	7	0	4	22	No	1	No	No	∞	1	0
Japón	1995	93	5172	55.6129	Sí	1	1	6	0	4	22	No	1	No	No	∞	1	0
Madrid	1996	57	2449	42.9649	No	2	2	1	0	0	0	No	1	No	No	∞	∞	0
Valencia	1995	83	4145	49.9398	Sí	1	1	3	0	0	0	No	1	No	No	∞	∞	0

**Tabla 1.** Invariantes calculados para algunas regiones analizadas.

Veremos qué conclusiones se pueden deducir de un primer análisis de las tablas correspondientes a años distintos para una misma región; del estudio de un año concreto en regiones distintas; y finalmente de la comparación de las tablas según el número de sectores considerados.

Como primer ejemplo, comparamos las tablas de Japón correspondientes a los años 1995 y 2000. El número de sectores, y por tanto de vértices en el grafo asociado, son bastante similares: 93 y 104, respectivamente. Lo mismo ocurre con el número de aristas, que indican los sectores que están relacionados, y con la valencia media, algo superior de todos modos en el año 2000. No se observan por lo demás diferencias entre los invariantes topológicos calculados, a excepción del número de vértices de corte que es sin embargo bastante similar: 6 para el año 1995 y 7 para el 2000. La complejidad de la economía de la región no muestra por tanto grandes diferencias entre años distintos. La existencia de una única componente conexa en el grafo asociado es indicativa de la no existencia de conjuntos autónomos distintos del total y el valor infinito del diámetro de la no relación entre todos los sectores; es decir, hay sectores que no son productos fundamentales.

En segundo lugar, tratamos el caso de tablas de una región dada en el mismo año, pero con distintos niveles de agregación de los sectores. Las tablas que usamos ahora son las de Andalucía (1995), con 29 y 88 sectores (en esta última son en realidad 89 los sectores, pero 2 de ellos solo tienen ceros entre sus coeficientes tecnológicos). Al aumentar el número de vértices, se encuentran conjuntos autónomos distintos del total, como indica el hecho de que el grafo subyacente sea no conexo y tenga en concreto 3 componentes conexas, en contra de lo que ocurre cuando los datos están más agregados. Existen también más vértices de corte cuando hay más sectores: 3 frente a 1. El hecho de considerar pocos sectores parece implicar una mayor relación entre ellos, puesto que de la conectividad por vértices y por aristas (6 y 14, respectivamente), se puede deducir que habría que eliminar un mínimo de 6 vértices para desconectar el grafo, o 14 aristas al menos. Las variaciones en todos estos invariantes parecen explicarse bastante bien por la forma en que se han agregado los sectores (normalmente, se agrupan sectores con muchas más relaciones entre sí que con el resto).

Nos centramos a continuación en ver qué ocurre durante un año dado en distintas regiones. Trabajaremos con el año 1995 y con los datos de Andalucía, Bélgica, Japón y

Valencia; posteriormente, haremos lo mismo con el año 2000 y las regiones de Castilla-León y Japón.

En el año 1995, se observa en primer lugar que existen conjuntos autónomos en unos casos y en otros no, no estando relacionado este hecho con el número de sectores considerados en cada caso. El grafo asociado es conexo con 29 sectores (Andalucía), con 83 (Valencia) y con 93 (Japón), pero no lo es cuando se trata de 58 sectores (Bélgica) u 88 (Andalucía). Sí parece observarse un número creciente de vértices de corte a medida que aumente el número de sectores productivos tenidos en cuenta. Se pasa de 1 cuando el número de sectores es el mínimo a 6 en el caso con más sectores, siendo 2 y 3 en los casos intermedios.

En el año 2000, los dos grafos que se obtienen son conexos (Castilla-León y Japón) y por tanto en ningún caso podemos encontrar conjuntos autónomos distintos del total. El número de vértices de corte es bastante más elevado en Japón (7 frente a 2) mientras que si nos referimos a la conectividad, tanto por vértices como por aristas, ocurre lo contrario. Para Castilla-León, los números son más elevados: 7 y 30, frente a 4 y 22, respectivamente. Por lo demás, no se observan grandes diferencias entre las estructuras de ambas economías.

Si tratamos de hacer finalmente un análisis general que incluya todos los datos disponibles, lo único que parece estar claro es que a medida que aumenta el número de sectores también lo hace el número de vértices de corte, lo que indicaría un menor nivel de implicación directa entre unos sectores y otros que cuando los datos están más agregados.

#### **4. ALGUNAS CONCLUSIONES**

Después de la aplicación de nuestro procedimiento a datos reales se puede afirmar que el cálculo de invariantes topológicos puede ser una interesante vía alternativa para obtener información de las tablas input-output. De hecho, el número de invariantes posibles es muy grande y alguno de los no calculados puede aportar algo a los que han sido presentados aquí. No obstante, en nuestra opinión, aún no se ha sacado todo el partido a los indicadores más básicos y sería deseable analizar con más detalle los

resultados que se obtienen de otras regiones y de otros niveles de agregación de sectores, para poder conocer cuáles de los invariantes son más útiles.

También cabe la posibilidad de mejorar nuestra técnica, por ejemplo, introduciendo como peso de cada arco su correspondiente coeficiente tecnológico, lo que podría sugerir una nueva línea de investigación relacionada con el análisis de los efectos de las diferentes formas de cálculo de las matrices tecnológicas y con el problema de los coeficientes negativos.

Posiblemente, otra forma de enriquecer este trabajo sería realizar cálculos similares con regiones que presenten niveles de desarrollo más distintos, pero el problema a soslayar aquí sería la dificultad de encontrar tablas de este tipo (y fiables) para países subdesarrollados, poco desarrollados, o con un desarrollo muy distinto del que estamos acostumbrados evaluar mediante procedimientos que impliquen el uso de matrices input-output.

Una última posibilidad que apuntamos para obtener resultados más provechosos es la de etiquetar algunos vértices de los grafos y calcular sus invariantes. Para ello, hay que tener presente que las economías analizadas no pueden tener estructuras muy diferentes y que las matrices deben haberse obtenido a partir de procesos de agregación de sectores similares o, al menos, comparables.

## **REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

Bott, R. y Mayberry, J. P. (1954). *Matrices and Trees, Economic Activity Analysis*. Wiley, New York.

Boulanger, P. M. (2005). Integration in Sustainability Impact Assessment: Meaning, Patterns and Tools. *Working paper*, Institut pour un Développement Durable.

De Mesnard, L. (2004). Understanding the shortcomings of commodity-based technology in input-output models: an economic-circuit approach. *J. of Regional Science*, 44 (1), pp. 125-141.

Diestel, R. (1997). *Graph Theory*. Springer, New York.

Harary, F. (1969). *Graph Theory*. Addison-Wesley, Massachussets.

Lantner, R. (2001). Influence Graphs Theory Applied to Structural Analysis. In M. Lahr and E. Dietzenbacher (eds.) *Input-Output Analysis: Frontiers and extensions*. Palgrave, London.

Martín, A. M. (2005). Valoración de la pobreza mediante técnicas de agregación de datos de diferente naturaleza. *Tesis Doctoral*. Universidad Pablo de Olavide, Sevilla.

Morillas, A. (1983). *La Teoría de Grafos en el Análisis Input-Output. La estructura productiva andaluza*. Universidad de Málaga. Málaga.